Teorem: Eğer y_1 ve y_2

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

dif. denklemin iki çözümü ve y_1, y_2'nin Wronskiyanının sıfır olmadığı bir t_0 noktası varsa c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

çözümleri dif. denklemin her çözümünü içerir.

Bu teoreme göre $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ genel çözümdür. Wronskiyan sıfırdan farklı y_1, y_2 çözümlerine dif. denklemin temel çözüm kümeleri denir.

Genel çözümü bulmak için, wronskiyanı sıfır olmayan iki çözümü bulmak yeterlidir. Buna göre bundan önceki örneklere bir daha göz atalım.

Örnek 1) $y_1(t) = e^{r_1 t}$ ve $y_2(t) = e^{r_2 t}$ lineer dif. denklemin iki çözümü olsun. Eğer $r_1 \neq r_2$ ise bu iki fonksiyonun temel çözüm kümesi olduğunu gösteriniz.

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix}$$

$$= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t}$$

$r_1 \neq r_2$ olduğundan $W \neq 0$ dır. Dolayısıyla $y_1 = e^{r_1 t}$ ve $y_2 = e^{r_2 t}$ temel çözüm kümesidir.

$$\left(\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = 0 \\ y = e^{rt} \end{array} \quad ar^2 + br + c = 0 \rightarrow \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \end{array} \quad r_1 \neq r_2 \quad \underbrace{y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}_{\text{genel çözüm}} \right)$$

2) $y_1(t) = t^{1/2}$ ve $y_2(t) = t^{-1}$'in $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$ dif. denkleminin temel çözümleri old. gös.

$$W(y_1, y_2)(t) = W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2} t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} t^{-3/2}$$

$t > 0$ için $W \neq 0$ dır. $y_1 = t^{1/2}$ ve $y_2 = t^{-1}$ temel çözümlerdir.

3) $y'' + 4y = 0$ dif. denkleminin temel çözümlerinin $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \sin 2t$ old. gösteriniz.

$$W(y_1, y_2)(t) = W = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

y_1, y_2 temel çözümlerdir. (Yani bu dif. denklemin genel çözümü $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ dir)

Teorem: I açık aralığında p ve q sürekli fonk. olmak üzere

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

dif. denklemini düşünelim. I'da bir t_0 noktası seçelim.

y_1, dif. denklemin çözümü olsun ve

$$y(t_0) = 1 \qquad y'(t_0) = 0$$

başlangıç koşulunu sağlasın. Ve y_2, dif. denklemin çözümü olsun ve

$$y(t_0) = 0 \qquad y'(t_0) = 1$$

başlangıç koşulunu sağlasın. Bu durumda y_1, y_2 temel çözüm kümesidir.

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Örnek: Yukardaki teoremden yararlanarak

$$y'' - y = 0$$

dif. denkleminde $t_0 = 0$ başlangıç noktasını alarak dif. denklemin özel temel iki çözümünü bulunuz.

Dünkü derste bu dif. denklemin genel çözümünün

$$y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

olduğunu gördük.

$$y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$$y_3(t_0) = y_3(0) = 1 \qquad y_3'(0) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad c_1 - c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \tfrac{1}{2},\; c_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$y_3(t) = \tfrac{1}{2}e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{-t} = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$y_4(t_0) = y_4(0) = 0 \qquad y_4'(0) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad c_1 - c_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = \tfrac{1}{2},\; c_2 = \tfrac{-1}{2}$$

$$y_4(t) = \tfrac{1}{2}e^{t} - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \sinh t$$

Teoreme göre y_3 ve y_4 temel çözümlerdir.

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \sinh t$$

3.3 Lineer Bağımsızlık ve Wronskiyan

İkinci mertebeden lineer homojen dif. denklemlerin genel çözümünün, Wronskiyanın sıfır olmadığı iki çözümün lineer birleşimi olarak ifade edilmesi, iki fonksiyonun lineer bağımsızlığı kavramı ile ilişkilidir.

Bir I aralığındaki bütün t değerleri için

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$$

denklemini sağlayan, ikisi birden sıfır olmayan k_1 ve k_2 sabitleri varsa I aralığı üzerinde f ve g fonksiyonlarına lineer bağımlı denir. Eğer fonksiyonlar I aralığında lineer bağımlı değilse lineer bağımsız denir. (Yani $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$ denklemini yalnız $k_1 = k_2 = 0$ ile sağlanırsa f ve g'ye lineer bağımsız denir)

örnek: 1) $\sin t$ ve $\cos(t-\pi/2)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olup olmadıklarını araştırınız.

$$\cos(t-\pi/2) = \sin t$$

$$k_1 \sin t + k_2 \cos(t-\pi/2) = 0$$

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = -1$$

$\sin t$, $\cos(t-\pi/2)$ lineer bağımlıdır.

2) e^{t}, e^{2t} fonksiyonlarının herhangi bir aralıkta lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

$$k_1 e^{t} + k_2 e^{2t} = 0$$

$t_0 \neq t_1$

$$k_1 e^{t_0} + k_2 e^{2t_0} = 0$$
$$k_1 e^{t_1} + k_2 e^{2t_1} = 0$$

$$\begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{2t_0} \\ e^{t_1} & e^{2t_1} \end{vmatrix} = e^{t_0+2t_1} - e^{2t_0+t_1}$$

$$= e^{t_0+t_1}\left(e^{t_1} - e^{t_0}\right) \neq 0$$

$$k_1 = k_2 = 0$$

Teorem: I açık aralığında f ve g diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve bir $t_0 \in I$ için $W(f,g)(t_0) \neq 0$ ise I üzerinde f ve g lineer bağımsızdır. f ve g, I üzerinde lineer bağımlı ise $\forall t \in I$ için $W(f,g)(t) = 0$ dır.

Kanıt: $W(f,g)(t_0) \neq 0$ ve f ve g lineer bağımlı olsun. Öyle bir sıfırdan farklı k_1 veya k_2 değeri vardır ki

$$k_1 f + k_2 g = 0$$

dır.

$$k_1 f' + k_2 g' = 0$$

bu iki denklemi sıfırdan farklı çözümü olması için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = W(f,g) = 0$$

Bu ise çelişkidir.

f ve g lineer bağımlı ise $f = kg$ dir.

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} kg & g \\ kg' & g' \end{vmatrix} = 0$$

dir.

($W(f,g)=0$ (her noktada) ise f ve g lineer bağımsız olabilir. Örnek $(-1,1)$ aralığında t ve $|t|$ lineer bağımsızdır. $W(t,g)=0$ dır.)

Örnek: e^t ve e^{2t}

$$W(e^t, e^{2t}) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t} \neq 0$$

olduğundan e^t ve e^{2t} lineer bağımsızdır.

Abel Teoremi: p ve q, I açık aralığında sürekli olmak üzere y_1 ve y_2

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

dif. denkleminin çözümleri ise c, t'ye bağlı olmayıp, y_1 ve y_2'ye bağlı kesin sabit olmak üzere $W(y_1,y_2)(t)$ Wronskiyeni

$$W(y_1,y_2)(t) = c\, e^{-\int p(t)\,dt}$$

ile verilir. Hatta $W(y_1,y_2)$, $\forall t \in I$ için sıfır yada sıfır değildir.

örnek: $y_1 = t^{1/2}$ ve $y_2 = e^{-t}$ fonksiyonları $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ $t>0$ dif. denklemin çözümleri olduğunu ve W. biliyorduk. Şimdi Abel Teoremini kullanarak W. hesaplıyalım.

$\left(W(y_1,y_2) = -\frac{3}{2} t^{-3/2} \text{ idi} \right)$

$$y'' + \frac{3}{2}\frac{1}{t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0 \qquad p(t) = \frac{3}{2t}$$

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) &= c\, e^{-\int p(t)\,dt} \\ &= c\, e^{-\int \frac{3}{2}\frac{1}{t}\,dt} \\ &= c\, e^{-\frac{3}{2}\ln t} \\ &= c\, t^{-3/2} \qquad \left(c = -\tfrac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Teorem: p ve q, I açık aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere y_1, y_2

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

dif. denklemin çözümleri olsun. Bu durumda y_1 ve y_2'nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in I$ için $W(y_1,y_2)(t)=0$ olmasıdır. y_1, y_2'nin I aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in I$ için $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ olmasıdır.

Sonuç: p ve q, I açık aralığında sürekli olmak üzere

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

dif. denkleminin iki çözümü y_1, y_2 ise aşağıdaki dört ifade birbirine denktir.

1) y_1 ve y_2, I'da temel çözüm kümesidir.
2) y_1 ve y_2, I'da lineer bağımsızdır.
3) Bir $t_0 \in I$ için $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$
4) $\forall t \in I$ için $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ dır.

Örnekler: 1) $f(t) = t^2 + 5t$ $\quad g(t) = t^2 - 5t$ fonk. lineer bağımlılığını inceleyiniz.

$$W(f,g)(t) = \begin{vmatrix} t^2+5t & t^2-5t \\ 2t+5 & 2t-5 \end{vmatrix} = 10t^2$$

$t \neq 0$ $W \neq 0$ olduğundan f ve g lineer bağımsızdır.

2) $f(x)=e^{3x}$ $\quad g(x)=e^{3(x-1)}$ $\quad$ // $\quad$ //

$$W(f,g)(x)=\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{3x-3} \\ 3e^{3x} & 3e^{3x-3} \end{vmatrix} = 3e^{6x-3} - 3e^{6x-3} = 0$$

(Birşey söylenemez

$$k_1 e^{3x} + k_2 e^{3x-3} = 0$$

$k_1 = -e^{-3}$ $\quad k_2 = 1$ alınırsa denklem sağlanır.

f ve g lineer bağımlıdır.

3) $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ dif. denklemini çözmeden iki çözümün wronskiyanını bulunuz.

$$y'' - \frac{t+2}{t} y' + \frac{t+2}{t^2} y = 0 \quad t \neq 0$$

$p(t) = -\frac{t+2}{t}$ $\quad t\neq 0, (0,\infty)$ sürekli

$$W = c\, e^{-\int p(t)\, dt}$$

$$\int p(t)\, dt = -\int \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt = -t - 2\ln t$$

$$W = c\, e^{t + 2\ln t} = c\, t^2 e^t$$